Klausur

SIM

SS 2006

Die Aufgabentexte sind nur sinngemäß wiedergegeben und auf das Wesentliche reduziert.
Alles in Schwarz geschriebene war gegeben; Lösungen sind blau.

Aufgabe ①

(entsprach exakt der Hörsaalübung ① aus dem selben Semester)
In einem U-Rohr (Skizze war ebenfalls vorhanden) schwingt eine Flüssigkeitssäule in Form einer harmonischen Schwingung...
Modellgleichungen:

$$\frac{dX(t)}{dt} = V(t)\,,\ \text{Anfangsbedingung } X(0) = 0.25\text{ m}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\omega^2 \cdot X(t)\,,\ \text{Anfangsbedingung } V(0) = 0.0\text{ m / sec}$$

$$\omega^2 = \frac{2 \cdot g}{L}\,,\ g = \text{Erdbeschleunigung, } 9.81\frac{m}{sec^2}\,,\ L = \text{Länge der Flüssigkeitssäule, } 1.0\text{ m}$$

Stellen Sie für einen Lösungsschritt von $(t,\ X_0,\ V_0)$ nach $(t + \Delta t,\ X_0,\ V_0)$ die Rechenschritte für die drei bekannten Verfahren dar.

Euler-Verfahren

$X_1 = X_1(X_0, V_0, \Delta t) = X_0 + \Delta t \cdot V_0$
$V_1 = V_1(X_0, V_0, \Delta t, \omega) = V_0 - \Delta t \cdot \omega^2 \cdot X_0$

Zentrale Differenzen

$$V_1 = V_1(X_0, V_0, \Delta t, \omega) = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t^2 \cdot \omega^2}{4}\right) \cdot V_0 - \Delta t \cdot \omega^2 \cdot X_0}{1 + \frac{\Delta t^2 \cdot \omega^2}{4}}$$

$$X_1 = X_1(X_0, V_0, V_1, \Delta t) = X_0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot (V_0 + V_1)$$

Runge-Kutta-Verfahren

$\Delta_{X1} = \Delta_{X1}(V_0) = V_0$
$\Delta_{V1} = \Delta_{V1}(\omega, X_0) = -\omega^2 \cdot X_0$

$$\Delta_{X2} = \Delta_{X2}(V_0, \Delta t, \Delta_{V1}) = V_0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \Delta_{V1}$$

$$\Delta_{V2} = \Delta_{V2}(\omega, X_0, \Delta t, \Delta_{X1}) = -\omega^2 \cdot \left(X_0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \Delta_{X1}\right)$$

$$\Delta_{X3} = \Delta_{X3}(V_0, \Delta t, \Delta_{V2}) = V_0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \Delta_{V2}$$

$$\Delta_{V3} = \Delta_{V3}(\omega, X_0, \Delta t, \Delta_{X2}) = -\omega^2 \cdot \left(X_0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \Delta_{X2} \right)$$

$$\Delta_{X4} = \Delta_{X1}(V_0, \Delta t, \Delta_{V3}) = V_0 + \Delta t \cdot \Delta_{V3}$$

$$\Delta_{V4} = \Delta_{V1}(\omega, X_0, \Delta t, \Delta_{X3}) = -\omega^2 \cdot (X_0 + \Delta t \cdot \Delta_{X3})$$

$$X_1 = X_1(X_0, \Delta t, \Delta_{X1}, \Delta_{X2}, \Delta_{X3}, \Delta_{X4}) = X_0 + \frac{\Delta t}{6} \cdot (\Delta_{X1} + 2 \cdot \Delta_{X2} + 2 \cdot \Delta_{X3} + \Delta_{X4})$$

$$V_1 = V_1(V_0, \Delta t, \Delta_{V1}, \Delta_{V2}, \Delta_{V3}, \Delta_{V4}) = V_0 + \frac{\Delta t}{6} \cdot (\Delta_{V1} + 2 \cdot \Delta_{V2} + 2 \cdot \Delta_{V3} + \Delta_{V4})$$

Aufgabe ②

Ordnen Sie die Begriffe Schrittweite, Sensitivitätsanalyse, Schrittweite, Schrittweite und Validierung zu:

Fehlerquelle	**Zuordnung**
Richtige Modellgleichungen	Validierung
Globaler Verfahrensfehler	Schrittweite
Stabilität der numerischen Lösung	Schrittweite
Unsicherheiten der Parameter	Sensitivitätsanalyse
Interne Zahlendarstellung	Schrittweite

Aufgabe ③

Ein Lager mit 10 Stellplätzen arbeitet nach dem LIFO-Prinzip (Last in, first out). In jeden Stellplatz passt genau ein Stück einer bestimmten Ware.

An jedem Tag werden 3 Schritte durchlaufen:

1. Eine bestimmte Anzahl von Waren wird eingelagert (Anzahl siehe Tabelle).
2. Eine bestimmte Anzahl von Waren wird entnommen (Anzahl siehe Tabelle).
3. Der Status des Lagers wird berechnet, d.h. die Anzahl der Waren, die sich am Ende des Tages im Lager befinden.

Zu Beginn ist das Lager vollständig leer.

Vervollständigen Sie untenstehende Tabelle, d.h. berechnen Sie den Status, nachdem Schritt 1 und 2 durchgeführt wurden.

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Eingang	2	1	3	2	1	0	2	2	1	0	2	2	0	1	0
Auslieferung	0	0	1	1	2	0	1	1	1	0	2	0	1	4	0
Status	2	3	5	6	5	5	6	7	7	7	7	9	8	5	5

Der Status am Ende eines Tages berechnet sich aus dem Status des Vortages plus den Eingang minus die Auslieferung – oder einfach die Waren aus der folgenden Tabelle abzählen. ;-)

Geben Sie in der Tabelle unten den Status des Lagers für jeden Tag detailliert an. Dabei soll jede Ware mit der Nummer des Tages gekennzeichnet werden, an dem sie eingelagert wurde. Die voreingetragenen Werte am Tag 5 bedeuten also, dass 2 Waren vorhanden sind, die am Tag 1 eingelagert wurden, eine von Tag 2 und 2 von Tag 3. Entnommen wird von oben.

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
												12			
												12	12		
								8	8	8	8	8	8		
Lager-				4			7	7	7	7	7	7	7		
plätze			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
			3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Wie viele Tage bleibt die Ware im Lager, die am Tag 7 eingelagert wurde, d.h. wie oft wird die Ware von Tag 7 bei Schritt 3 mitgezählt?
7 mal

Aufgabe ④

Chemische Reaktion mit 3 Stoffen A, B und C, wobei A mit der Geschwindigkeit r_A in B übergeht und B mit der Geschwindigkeit r_B in C.
Modellgleichungen:

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = -r_A \cdot C_A(t)$$

$$\frac{dC_B(t)}{dt} = +r_A \cdot C_A(t) - r_B \cdot C_B(t)$$

$$\frac{dC_C(t)}{dt} = +r_B \cdot C_B(t)$$

Führen Sie das Verfahren der Zentralen Differenzen durch.

$$C_{A1} = C_{A1}(\Delta t, r_A, C_{A0}) = C_{A0} \cdot \frac{1 - r_A \cdot \frac{\Delta t}{2}}{1 + r_A \cdot \frac{\Delta t}{2}}$$

$$C_{B1} = C_{B1}(\Delta t, r_A, r_B, C_{A0}, C_{B0}, C_{A1}) = \frac{C_{B0} \cdot \left(1 - r_B \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) + r_A \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot (C_{A0} + C_{A1})}{1 + r_B \cdot \frac{\Delta t}{2}}$$

$C_{C1} = C_{C1}(\Delta t,\ r_B,\ C_{B0},\ C_{C0},\ C_{B1}) = C_{C0} + r_B \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(C_{B0} + C_{B1}\right)$

Aufgabe ⑤

(entsprach exakt der Hörsaalübung ③ aus dem selben Semester)

In einer Kapillare breitet sich ein Farbstoff in Wasser durch einen eindimensionalen Diffusionsvorgang aus. (Skizze war gegeben.)

Diffusionsgleichung: $\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$ für $0\ \mathrm{cm} < x < L$

Diskretisierung: $\frac{dC_j(t)}{dt} = \frac{D}{\Delta x^2} \cdot \left(C_{j-1} - 2 \cdot C_j + C_{j+1}\right)$

Durch Anwendung der Methode der Zentralen Differenzen erhält man ein tridiagonales lineares Gleichungssystem (gegeben), das den Parameter σ enthält.

Stellen Sie nachfolgend σ und die Koeffizienten d_j detailliert dar.

$\sigma = \sigma(\Delta t,\ D,\ \Delta x) = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{D}{\Delta x}$

$d_2 = d_2\left(\sigma, C_R, C_2^{(0)}, C_3^{(0)}\right) = C_2^{(0)} + \sigma \cdot \left(2 \cdot C_R - 2 \cdot C_2^{(0)} + C_3^{(0)}\right)$

$d_j = d_j\left(\sigma, C_{j-1}^{(0)}, C_j^{(0)}, C_{j+1}^{(0)}\right) = C_j^{(0)} + \sigma \cdot \left(C_{j-1}^{(0)} - 2 \cdot C_j^{(0)} + C_{j+1}^{(0)}\right)$ für $j = 3, 4, \ldots, n-1$

$d_n = d_n\left(\sigma, C_{n-1}^{(0)}, C_n^{(0)}\right) = C_n^{(0)} + \sigma \cdot \left(C_{n-1}^{(0)} - 2 \cdot C_n^{(0)}\right)$